

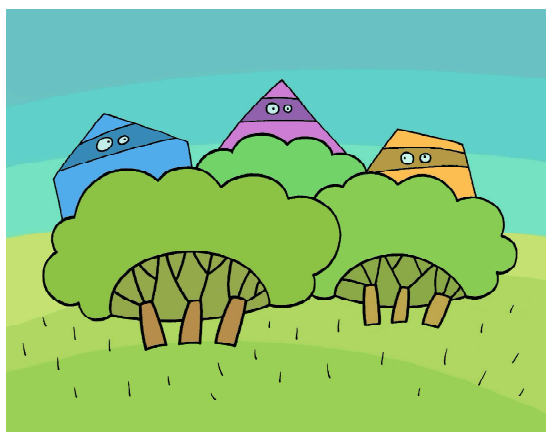
ПРАВИЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИКИ

Теория пространственных многоугольников, в частности правильных пространственных многоугольников, является на сегодня слабо развитой частью знаний о формах пространства. С помощью систем пространственной динамической геометрии имеется возможность исследования таких многоугольников. Это будет показано на примере правильного пространственного шестиугольника. В конце будет доказана полнота найденных таким образом шести типов правильных пространственных шестиугольников. Работа завершается обзором правильных пространственных семи- и восьмиугольников.

1. Введение

О правильных пространственных многоугольниках на сегодняшний день мало что известно. В этом каждый может легко убедиться с помощью интернета.

Существует только один вид правильного пространственного четырехугольника $E_1E_2E_3E_4$ (рис. 1), который может быть составлен из двух конгруэнтных равнобедренных треугольников $E_1E_2E_3$ и $E_1E_3E_4$ с их об-



О правильных пространственных многоугольниках на сегодняшний день мало что известно.

щим основанием E_1E_3 [4]; угол четырехугольника α принимает значения между 0° и 180° .

Правильный пространственный пятиугольник всегда плоский [2].

Изучаемые проблемы в пространстве обычно сложнее, чем на плоскости. С этим мы столкнемся уже при рассмотрении правильного пространственного шестиугольника (3D-шестиугольник).

2. Предварительные замечания по построению правильных пространственных шестиугольников (3D-шестиугольников)

Пусть $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ – правильный пространственный шестиугольник, тогда равнобедренные треугольники $E_1E_2E_3$, $E_2E_3E_4$, $E_3E_4E_5$, $E_4E_5E_6$ и $E_5E_6E_1$ с углом α между сторонами конгруэнтны друг другу. Следовательно, треугольники $E_1E_3E_5$ и $E_2E_4E_6$ – конгруэнтные равнобедренные треугольники. Любой правильный 3D-шестиугольник может быть составлен из базисного правильного треугольника $E_1E_3E_5$ и соответствующих конгруэнтных между собой равнобедренных треугольников $E_1E_2^*E_3$, $E_3E_4^*E_5$, $E_5E_6^*E_1$ (рис. 2 и 3). При этом в экспериментальной конструкции величину угла α можно варьировать, изменяя положение точки

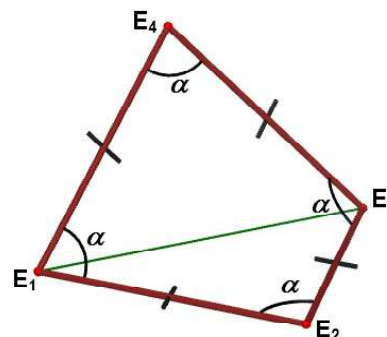


Рис. 1. Правильный пространственный четырехугольник

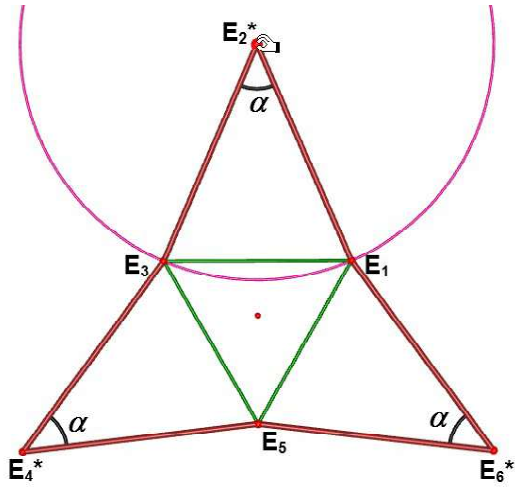


Рис. 2. Конструкция свертки

E_2^* , кроме того, точки E_2^* , E_4^* и E_6^* движутся по окружностям радиусов E_1E_3 , E_3E_5 и E_5E_1 .

3. Конструирование правильных 3D-шестиугольников методом сгиба

Тип 1: Сначала поднимаем два равнобедренных треугольника над плоскостью $E_1E_3E_5$ так, что их общий угол при вершине равен α (рис. 4). Затем это построение можно продолжить двумя способами:

Тип 1.1: Третий равнобедренный треугольник будет так повернут, что мы получим правильный 3D-шестиугольник, углы которого являются углами треугольной антипризмы. Это возможно для углов $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ (рис. 5).

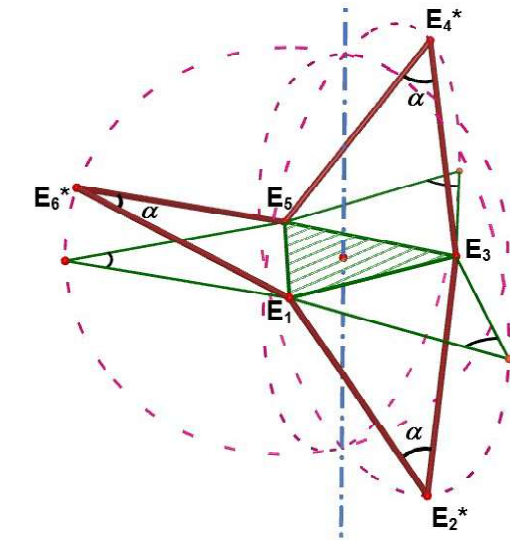
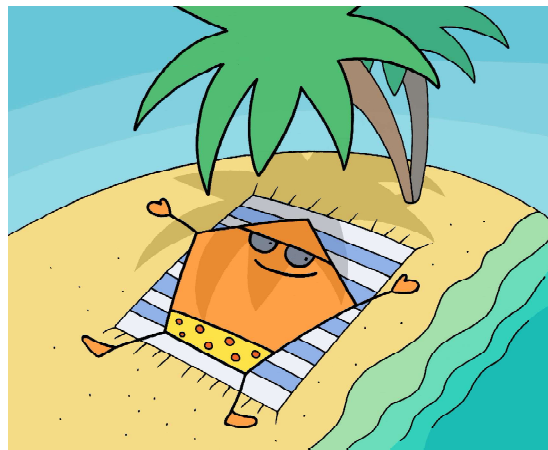


Рис. 3. Конструкция свертки с траекториями



Правильный пространственный пятиугольник всегда плоский

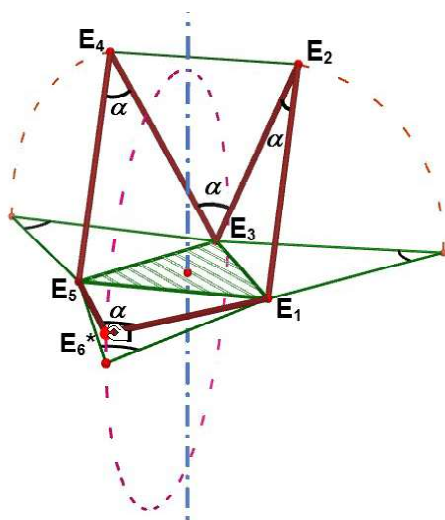


Рис. 4. Сгибание. Тип 1

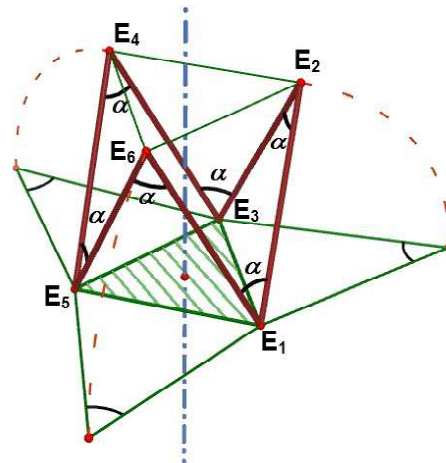


Рис. 5. Тип 1.1 Многоугольник Петри или «многоугольник поверхности» треугольной антипризмы

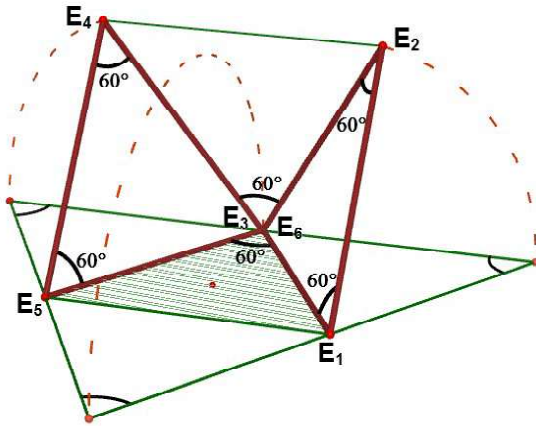


Рис. 6. Случай 1.2.1

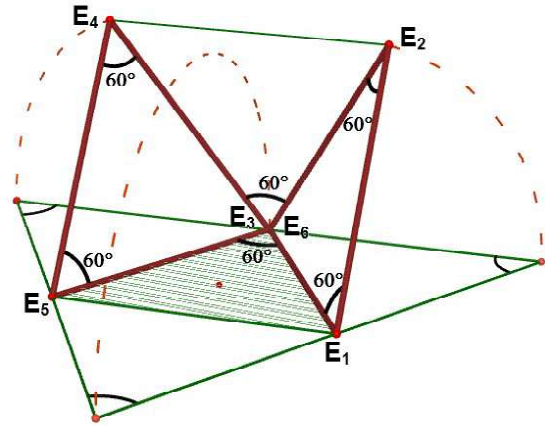


Рис. 7. Случай 1.2.2

Упражнение: покажите, что угол подъема равен

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Так как

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 1,$$

то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \sqrt{3}$$

и

$$\alpha < 120^\circ.$$

Приняв конфигурацию Тип 1 за исходную, согнем треугольник $E_5E_6E_1$ относительно треугольника $E_1E_3E_5$ так, что в результате получим новый 3D-шестиугольник.

В зависимости от величины угла α имеем три типа шестиугольников:

Тип 1.2.1: для угла α в интервале $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ (рис. 6).

Тип 1.2.2: $\alpha = 60^\circ$ (рис. 7).

Тип 1.2.3: для $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ (рис 8).

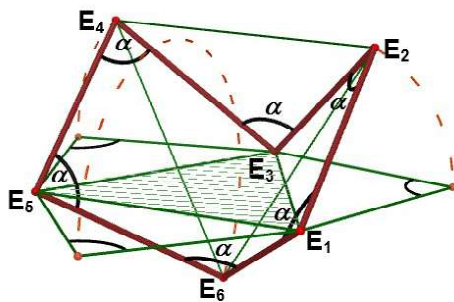


Рис. 8. Случай 1.2.3

3D-шестиугольники типов 1.2.2–1.2.3 получаются при зеркальном отображении соответствующих многоугольников боковой поверхности антипризмы относительно плоскости $E_1E_2E_4E_5$ (рис. 9–11).

Эти 3D-шестиугольники симметричны плоскостям перпендикулярным к сторонам E_1E_2 , E_4E_5 и E_1E_5 , E_2E_4 , которые также перпендикулярны друг другу и проходят через их середину, при этом эти шестиугольники симметричны относительно прямой пересечения указанных плоскостей. В случае 1.2.2 плоскости $E_1E_3E_4$ и $E_2E_6E_5$ также являются плоскостями симметрии, и их свойства симметрии аналогичны свойствам правильной четырехугольной пирамиды.

Тип 2: Если продолжать вращать два равнобедренных треугольника, как показано на рис. 5, то получим конфигурацию с двумя самопересекающимися сторонами треугольников (рис. 12).

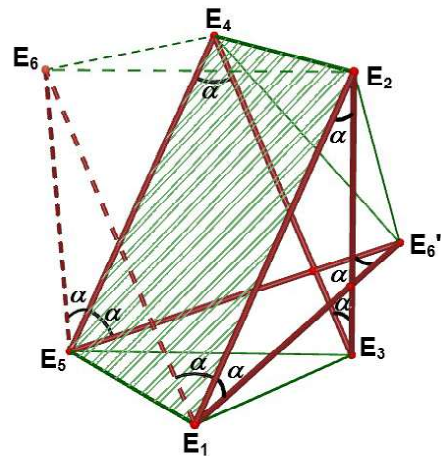


Рис. 9. Тип 1.2.1: $0^\circ < \alpha < 60^\circ$

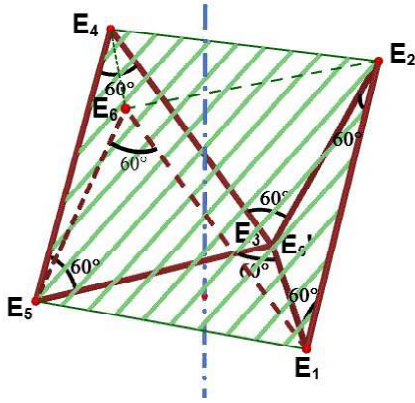


Рис. 10. Тип 1.2.2: $\alpha = 60^\circ$

Тип 2.1: Если к этому добавить соответствующим образом повернутый треугольник $E_3E_4E_5$, то мы получим самопересекающийся 3D-шестиугольник, углы которого равны углам прямой треугольной призмы (рис. 13). Это верно для углов α в пределах $0^\circ < \alpha < 60^\circ$.

Упражнение: покажите, что в этом случае угол подъёма равен

$$\frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{\sqrt{3} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right).$$

Из того, что

$$-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 0,$$

имеем

$$\sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$$

и

$$\alpha < 60^\circ.$$

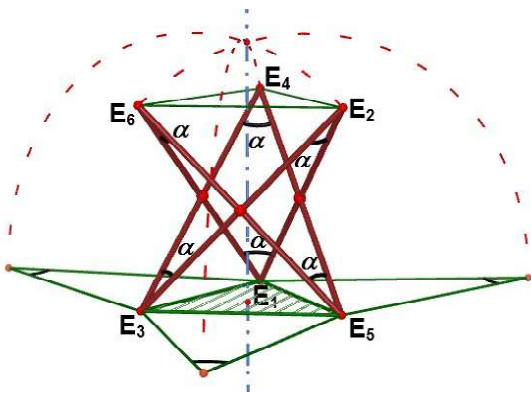


Рис. 13. Тип 2.1 «многоугольник диагоналей» прямой призмы

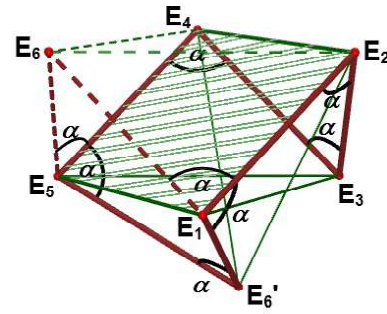


Рис. 11. Тип 1.2.3: $60^\circ < \alpha < 120^\circ$

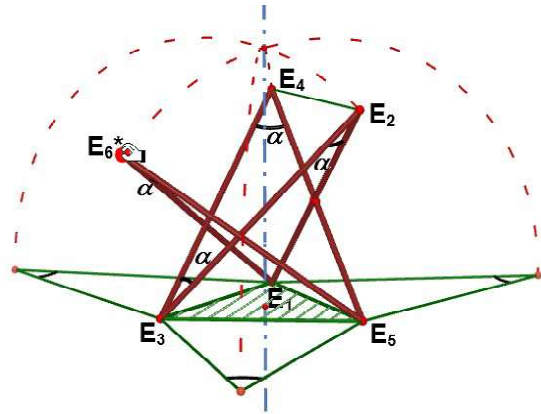


Рис. 12. Схема построения. Тип 2

Тип 2.2: Если продолжать вращать треугольник $E_1E_5E_6$, то мы получим еще один правильный центрально-симметричный 3D-шестиугольник (рис. 14) с одной плоскостью симметрии.

В шестиугольнике Тип 2.1, отобразив симметрично треугольник $E_1E_5E_6$ относительно плоскости $E_1E_2E_4E_5$, получим шестиугольник – Тип 2.2 (рис. 15).

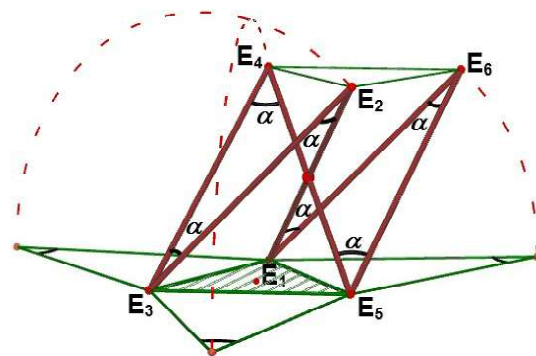


Рис. 14. Тип 2.2

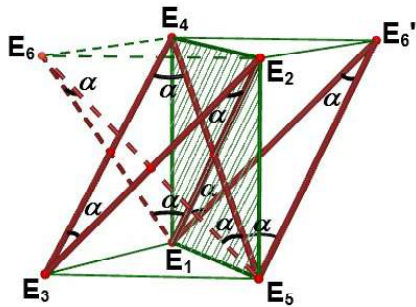


Рис. 15. Тип 2.2: Построение методом плоскостной симметрии

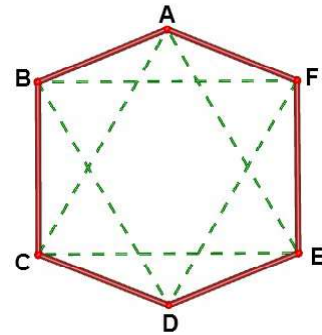


Рис. 16. 3D-Шестиугольник

4. Доказательство существования типов 3D-шестиугольников

Несмотря на то, что из вышеизложенного видно, что не существует других типов пространственных шестиугольников, это необходимо доказать. Достаточно показать, что две пересекающиеся биссекторные плоскости двух углов шестиугольника образуют биссекторную плоскость самого шестиугольника. В этом случае положение остальных углов определено.

Предположение: Пусть $ABCDEF$ правильный 3D-шестиугольник (рис. 16). Треугольники ACE и BDF равносторонние (показаны пунктиром). Углы B и F «сгибаются по одной стороне», так как на разных сторонах плоскости соответствующего равностороннего треугольника не может быть трех углов.



«Простейшим» восьмиугольником такого типа является восьмиугольник, стороны которого ребра куба...

Утверждение: Зеркальное отображение относительно биссекторных плоскостей углов B и F есть симметричное отображение 3D-шестиугольника.

Доказательство: Тетраэдры $ABCD$ и $AFED$ конгруэнтны, так как их соответствующие треугольные грани конгруэнтны. Так как вершины A и D лежат в биссекторных плоскостях углов B и D , то треугольник ABD отображается на треугольник AFD . Из этого следует, что вершина C переходит в E , и утверждение доказано.

5. Прогноз

У правильного 3D-семиугольника не существует симметричного преобразования, при котором каждая его вершина отображается на другую, ввиду нечетного числа его вершин. Такие 3D-семиугольники имеют либо одну ось, либо одну плоскость симметрии, как и любой другой правильный 3D-многоугольник с нечетным числом вершин, большим пяти. Один такой семиугольник (с прямыми углами) показан на рис. 17. Он имеет только одну плоскость симметрии, не может быть отображен на другие вершины многоугольника. Это же относится и к симметричным относительно оси 3D-семиугольникам.

На рис. 18 показано семейство правильных симметричных относительно плоскости 3D-семиугольников. Рассмотренный выше семиугольник с прямыми углами – особый случай. Еще один особый случай соответствует углу $\alpha = 60^\circ$ (рис. 19).

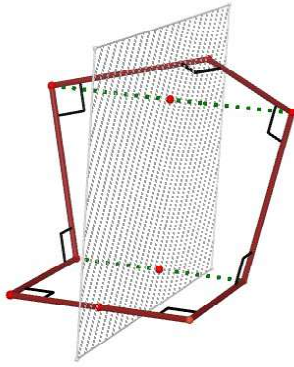


Рис. 17. Правильный, симметричный относительно плоскости 3D-семиугольник

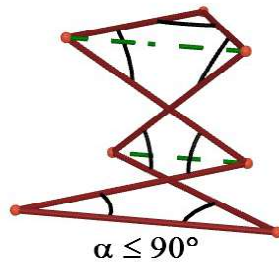


Рис. 18. Правильный, симметричный относительно плоскости 3D-семиугольник (Общий случай)

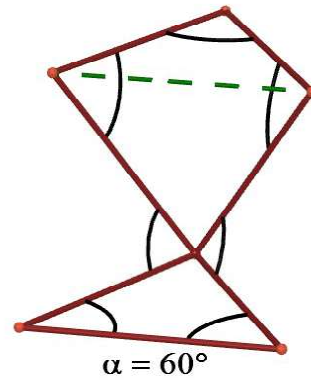


Рис. 19. Правильный, симметричный относительно плоскости 3D-семиугольник (Особый случай)

Так как для всех правильных плоских многоугольников это свойство следует из свойства равенства сторон и углов, возникает вопрос, достаточно ли для определения того, что пространственный многоугольник правильный, только равенства его сторон и углов?

В заключение рассмотрим построение правильного 3D-восьмиугольника, у которого все углы эквивалентны. «Простейшим» восьмиугольником такого типа является восьмиугольник, стороны которого – ребра куба (рис. 20). Другие правильные 3D-восьмиугольники, у которых угол является параметром, получим по аналогии с частью 1. Примечание: Вершины правильного 3D-восьмиугольника $E_1E_2E_3E_4E_5E_6E_7E_8$ – это вершины двух равносторонних четырехугольников $E_1E_2E_5E_7$ и $E_2E_4E_6E_8$, плоских

или пространственных. Начнем с квадрата в качестве базового четырехугольника и продолжим аналогично построению пространственных шестиугольников. Далее мы показываем только результат построения и обозначаем углы восьмиугольника. Сначала получаем правильный 3D-восьмиугольник как Петри – многоугольник или многоугольник поверхности четырехугольной антипризмы с квадратным основанием (рис. 21), при этом внутренний угол восьмиугольника должен находиться в пределах $0-135^\circ$.

Отобразив угол относительно соответствующей плоскости симметрии, получим еще три типа восьмиугольников, зависящих от величины угла (рис. 22–24); углы, которые отличны от прямых углов, образуют 3D-ромбы, то есть ромбы, получаемые от сгибания плоских ромбов вдоль одной из диа-

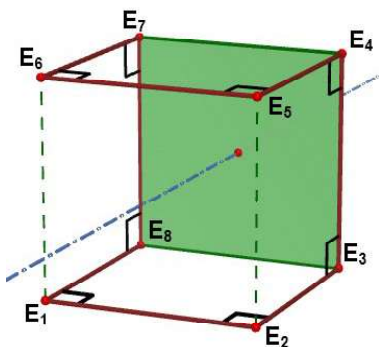


Рис. 20 «Простейший» правильный 3D-восьмиугольник (Тип 1)

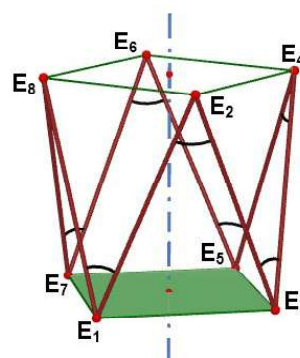


Рис. 21. Правильный 3D-восьмиугольник – Петри-многоугольник четырехугольной антипризмы (Тип 2.1)

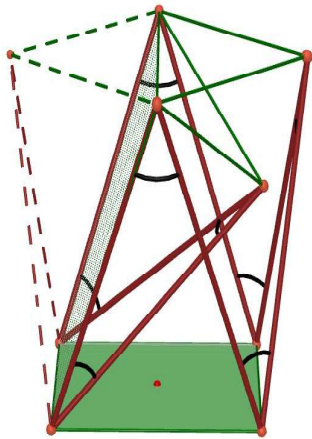


Рис. 22. Восьмиугольник.
Тип 2.2.1

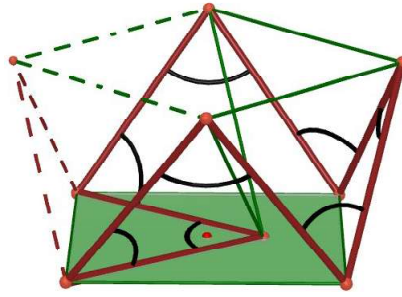


Рис. 23. Восьмиугольник.
Тип 2.2.2

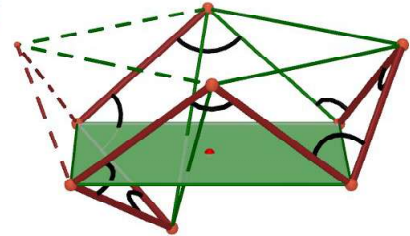
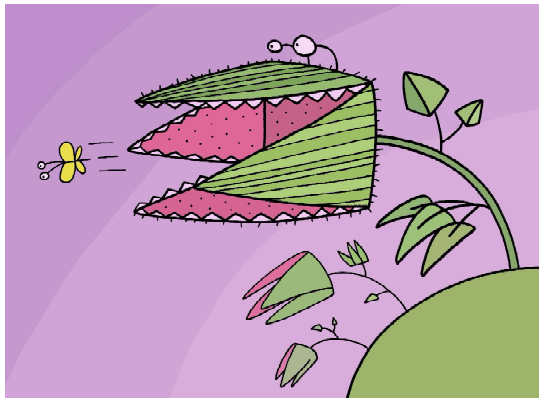


Рис. 24. Восьмиугольник.
Тип 2.2.3

гонали. Их стороны равны, так же как и у квадратов. Из этих типов многоугольников получается дополнительное множество многоугольников с помощью подходящего зеркального отображения (рис. 25–27).



...правильный 3D-восьмиугольник...

Если исходить из 3D-ромба, то оставшиеся четыре вершины являются углами квадрата, длины сторон которого равны сторонам 3D-ромба. Квадрат и 3D-ромб, взятые за исходные, связаны между собой квазисопряженно. Не существует правильного 3D-восьмиугольника с плоским ромбом в качестве базового четырехугольника, так как только многоугольник Петри четырехугольной антипризмы с квадратным основанием является правильным 3D-восьмиугольником. Перечень 3D-восьмиугольников, приведенных в данной статье, конечно не полный. Заинтересованный читатель с помощью программ динамической пространственной геометрии и методов элементарной геометрии на плоскости и в пространстве может найти и другие виды правильных 3D-многоугольников.

Рисунки выполнены автором с помощью программы Cabri 3D, Версия 2.1.1.

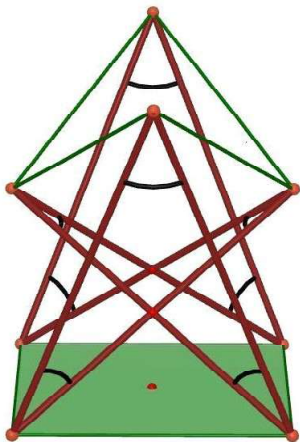


Рис. 25 Восьмиугольник.
Тип 2.3.1

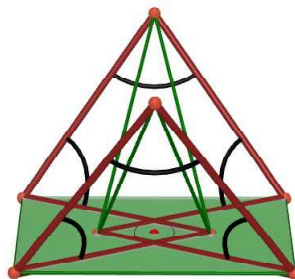


Рис. 26 Восьмиугольник.
Тип 2.3.2

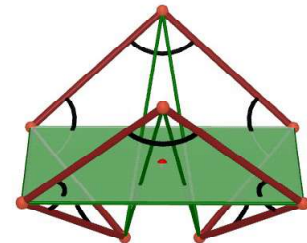


Рис. 27 Восьмиугольник.
Тип 2.3.3

Литература

1. *Bainville E., Laborde J.-M.* (2004–2015): Cabri 3D 2.1, Grenoble: www.cabri.com
2. *Гарбер, А. П. et al.* (1961): Математическое Просвещение 1961, 6, 345–347.
3. *Schumann, H.* (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Verlag Franzbecker.
4. *Schumann, H.* (2017): Das räumliche Viereck – eine Einführung. In: MNU Journal, Heft 6, Jg. 70, 382–389.

Prof. Dr. Heinz Schumann
Senior lecturer for mathematics and
its didactics, Faculty II,
Mathematics University of Education
Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

